

Chapitre 12

Cinématique et dynamique du solide indéformable



12.1 Cinématique du solide indéformable

- 12.1.1 Solide indéformable
- 12.1.2 Angles d'Euler
- 12.1.3 Angles de Tait-Bryan
- 12.1.4 Vitesse et accélération de points du solide
- 12.1.5 Roulement et glissement

12.2 Dynamique du solide indéformable

- 12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique
- 12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force
- 12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point

12.3 Tenseur d'inertie et équations d'Euler

- 12.3.1 Tenseur d'inertie
- 12.3.2 Moments d'inertie et axes principaux d'inertie
- 12.3.3 Equations d'Euler

12.1 Cinématique du solide indéformable

12.1.1 Solide indéformable

12.1.2 Angles d'Euler

12.1.3 Angles de Tait-Bryan

12.1.4 Vitesse et accélération de points du solide

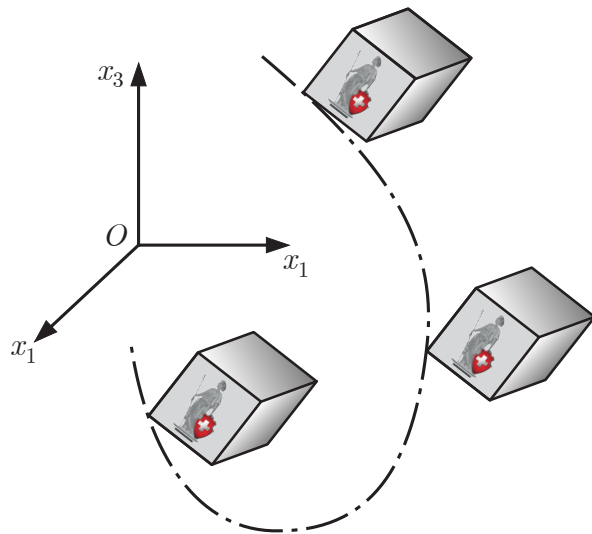
12.1.5 Roulement et glissement

- **Solide indéformable** : système fermé constitué d'un ensemble de points matériels dont les distances relatives sont constantes. Il ne change ni de volume, ni de forme, mais uniquement d'orientation spatiale.

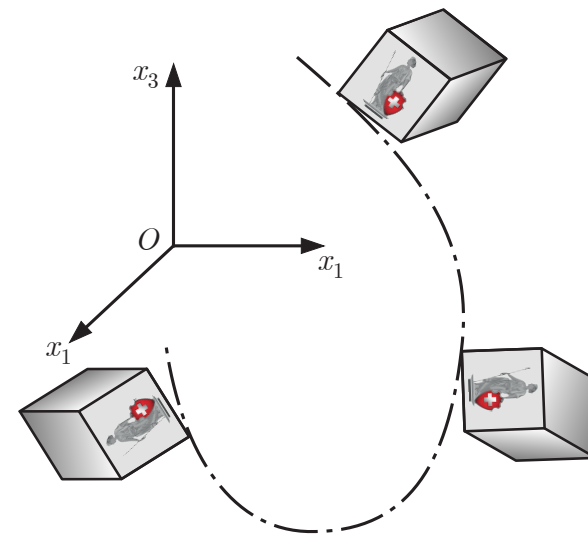
1 Référentiel

2 Cube

- 1 **Point matériel** :
mouvement de rotation
du centre de masse



- 2 **Solide indéformable** : mouvements de
rotation du centre de masse et de rotation
propre autour du centre de masse.



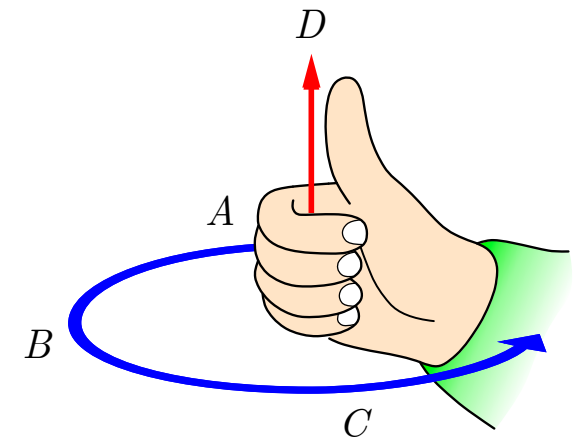
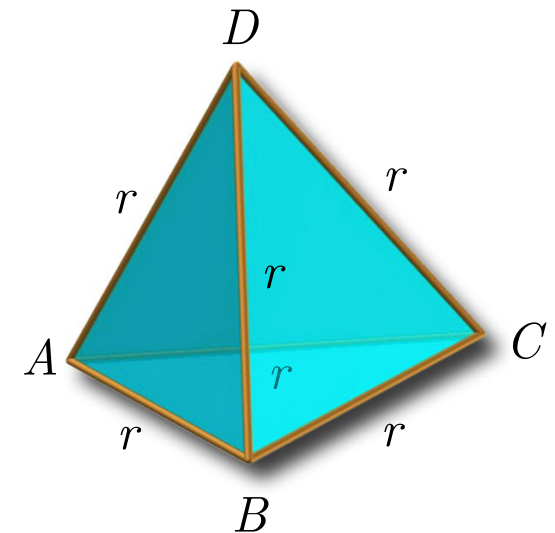
- **Théorème d'orientation** : 6 coordonnées sont nécessaires pour orienter un solide indéformable quelconque par rapport à un référentiel donné.

- 1 **Position** : 3 coordonnées cartésiennes
- 2 **Orientation** : 3 angles (Euler)

- **Démonstration** : tétraèdre régulier de sommets A , B , C et D , et d'arrête r .

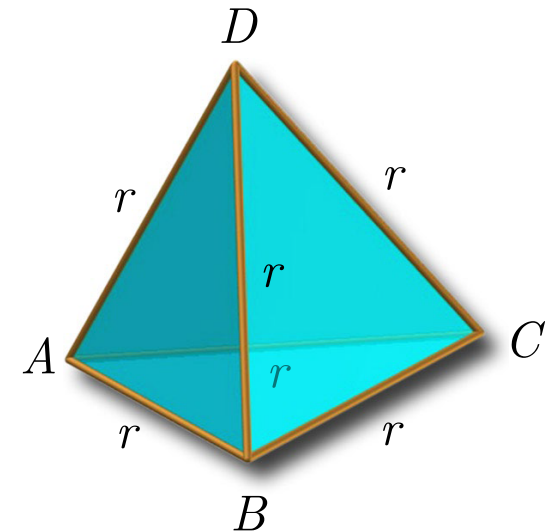
- **Orientation** : main droite

$$(\mathbf{AB} \times \mathbf{AC}) \cdot \mathbf{AD} > 0$$



- **Théorème d'orientation** : 6 coordonnées sont nécessaires pour orienter un solide indéformable quelconque par rapport à un référentiel donné.

- ① **Position** : 3 coordonnées cartésiennes
- ② **Orientation** : 3 angles (Euler)



- **Démonstration** : tétraèdre régulier de sommets A , B , C et D , et d'arrête r .

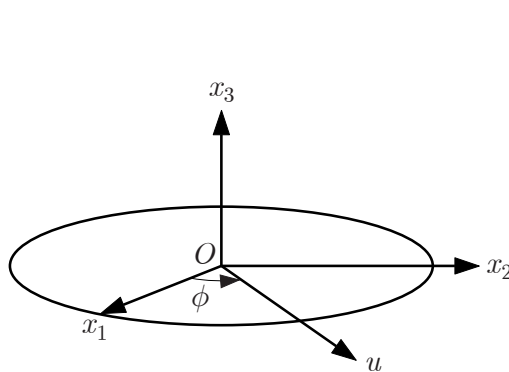
- ① **Point A** : 3 coordonnées cartésiennes (x, y, z)
- ② **Point B** : 2 angles (θ, ϕ) sur une sphère de rayon r centrée en A .
- ③ **Point C** : 1 angle ψ sur le cercle obtenu par intersection de deux sphères de rayon r centrées en A et B .
- ④ **Point D** : entièrement déterminé par l'intersection de trois sphères de rayon r centrées en A , B et C et par l'orientation du tétraèdre (règle de la main droite).

- **Orientation** : l'orientation d'un solide indéformable autour de l'origine O peut être repérée par des angles (ϕ, θ, ψ) appelés **angles d'Euler**

① **Repère absolu** : $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ associé au référentiel d'inertie

② **Repère relatif** : $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ associé au solide indéformable

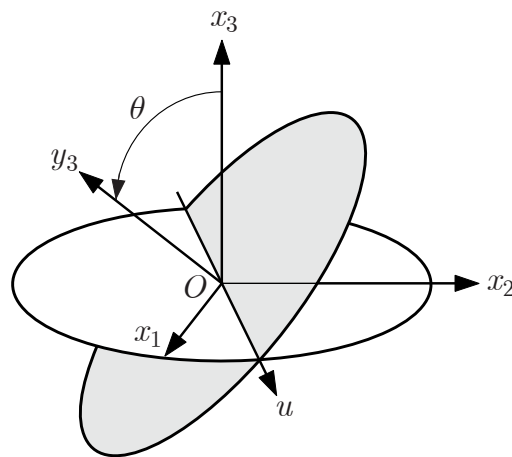
③ **Transformation** : $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \xrightarrow{(\phi, \theta, \psi)} (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$



① **Précession** :

Rotation d'angle ϕ
autour de l'axe
vertical Ox_3 :

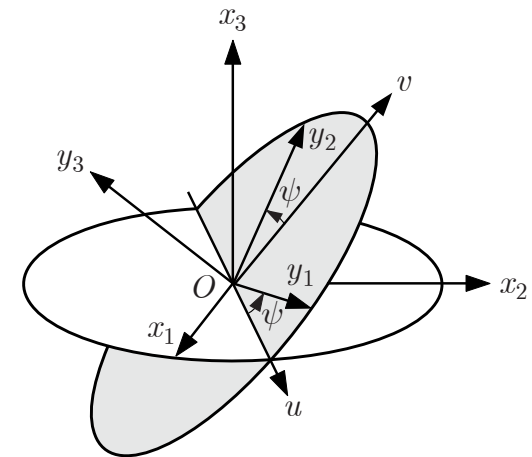
$$Ox_1 \longrightarrow Ou$$



② **Nutation** :

Rotation d'angle θ
autour de l'axe nodal
 Ou :

$$Ox_3 \longrightarrow Oy_3$$



③ **Rotation propre** :

Rotation d'angle ψ
autour de l'axe de
rotation propre Oy_3 :

$$Ou \longrightarrow Oy_1$$

- **Mouvements de rotation** : une vitesse angulaire est associée à chaque mouvement de rotation.

- 1 **Précession** : autour de l'axe vertical Ox_3

$$\dot{\phi} = \dot{\phi} \hat{x}_3$$

- 2 **Nutation** : autour de l'axe nodal Ou

$$\dot{\theta} = \dot{\theta} \hat{u}$$

- 3 **Rotation propre** : autour de l'axe de rotation propre Oy_3

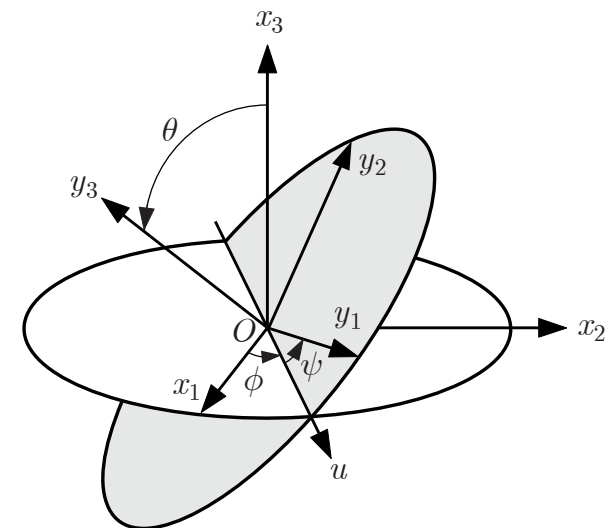
$$\dot{\psi} = \dot{\psi} \hat{y}_3$$

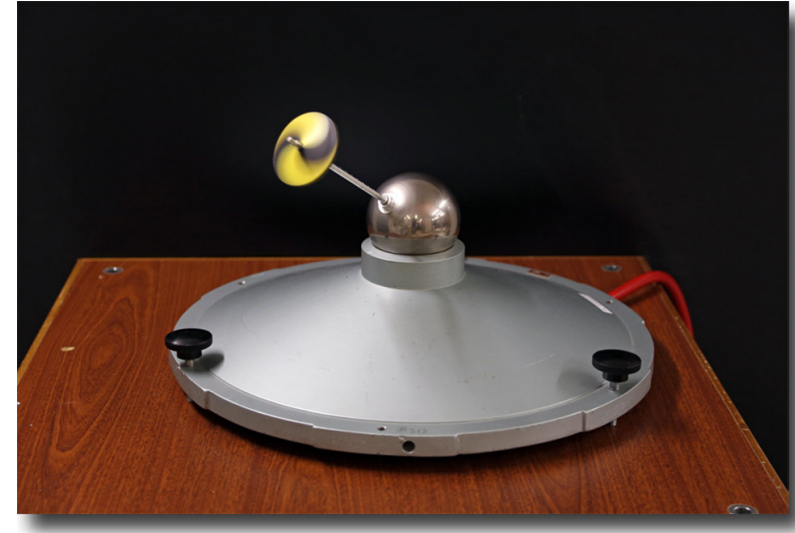
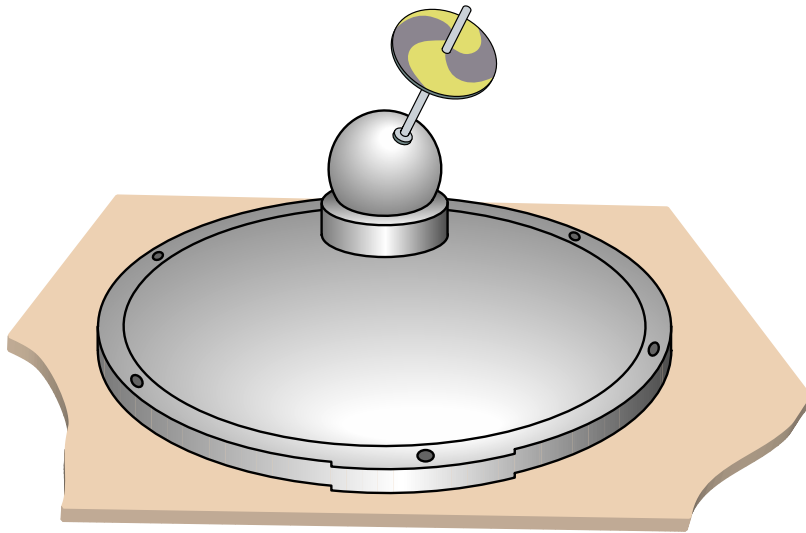
- **Vitesse angulaire** : solide indéformable

$$\Omega = \dot{\phi} + \dot{\theta} + \dot{\psi} = \dot{\phi} \hat{x}_3 + \dot{\theta} \hat{u} + \dot{\psi} \hat{y}_3 \quad (12.1)$$

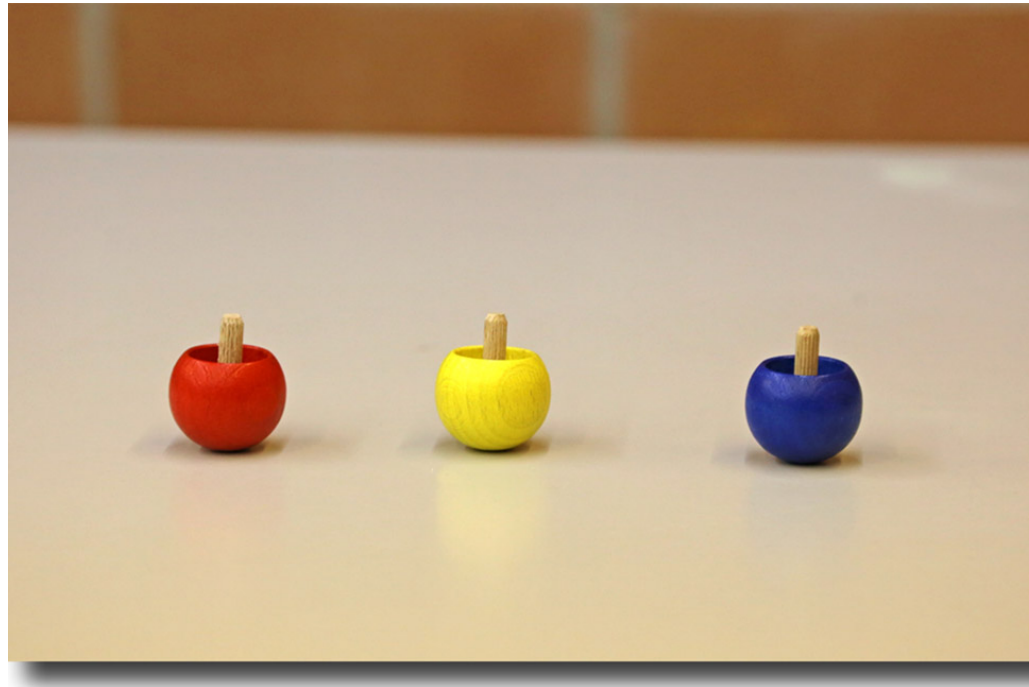
Leonhard Euler

1707 – 1783

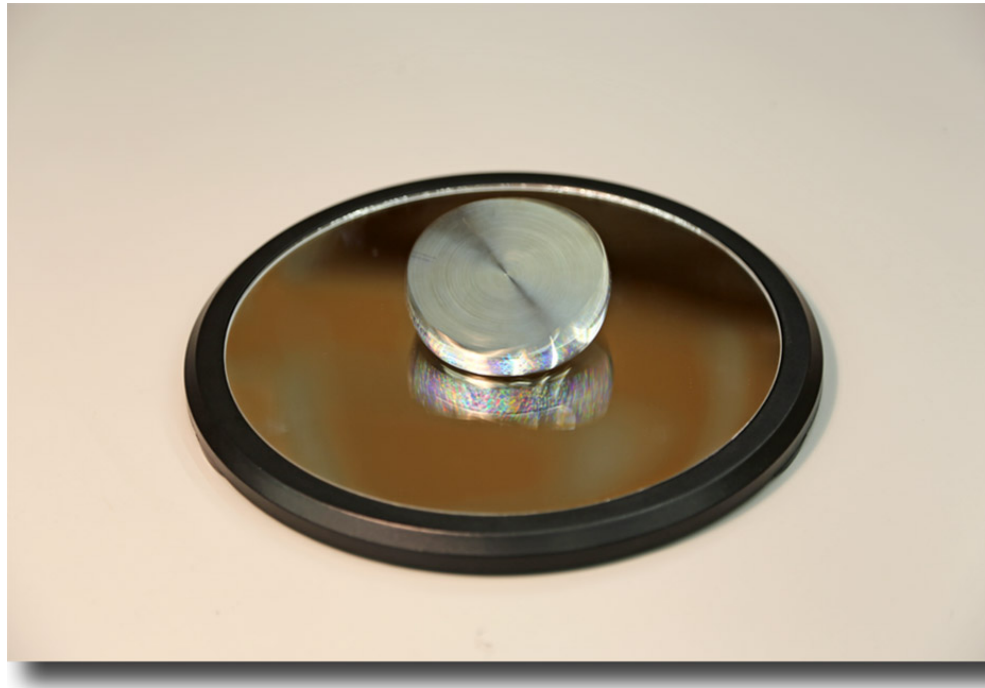




- 1 La **précession** de vitesse angulaire $\dot{\phi}$ est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscope autour de l'axe de symétrie vertical.
- 2 La **nutation** de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscope dans un plan vertical radial.
- 3 La **rotation propre** de vitesse angulaire $\dot{\psi}$ est le mouvement de rotation du disque de couleur autour de l'axe du gyroscope.



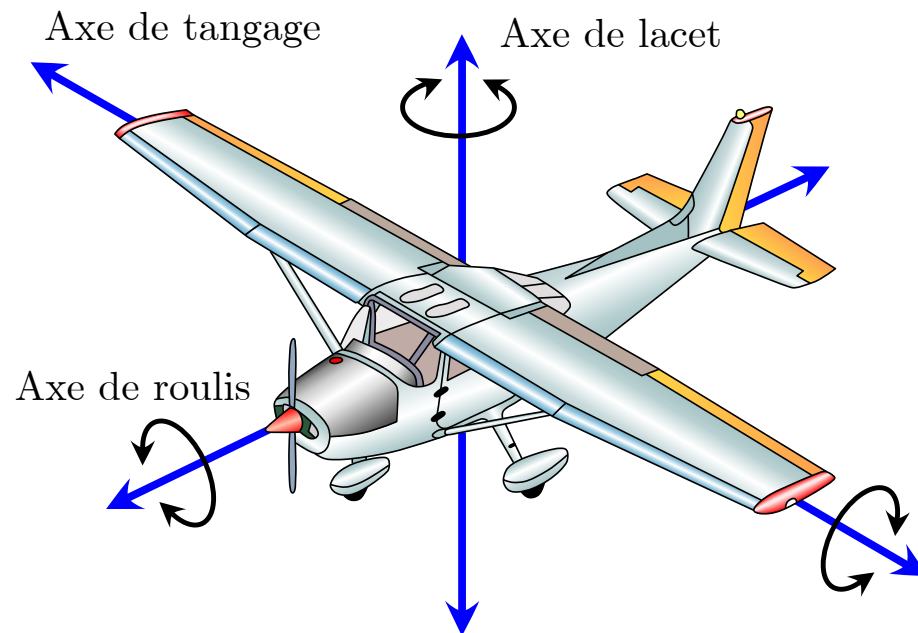
- On lance la toupie chinoise en lui donnant un mouvement de rotation propre. Le moment de force dû à son poids lui confère un mouvement de précession.
- Ce qui distingue la toupie chinoise d'une autre toupie est sa forme géométrique particulière qui donne lieu à un couplage important des mouvements de rotation propre et de précession avec la nutation.
- Ce couplage a pour effet que la toupie se retourne sur sa pointe.



- On lance le disque d'Euler en le faisant tourner dans un plan vertical. Le moment de force dû à son poids lui confère un mouvement de précession.
- La précession du point de contact du disque d'Euler lui donne ce bruit caractéristique.
- La nutation qui amène progressivement le plan du disque à l'horizontale, accroît la vitesse angulaire de rotation du point de contact, qui diverge lorsque le disque s'arrête..

- **Angles de Tait-Bryan** : ces angles sont une variante des angles d'Euler adaptée pour l'aéronautique.

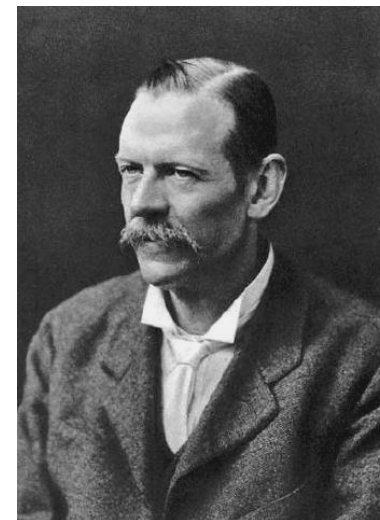
- 1 **Lacet** : analogue de la précession
- 2 **Tangage** : analogue de la nutation
- 3 **Roulis** : analogue de la rotation propre

**Peter Tait**

1831 – 1901

**George Bryan**

1864 – 1929



❶ **Référentiel absolu** : référentiel d'inertie

Repère absolu : $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ d'origine O

❷ **Référentiel relatif** : référentiel accéléré du solide indéformable en translation et en rotation à vitesse angulaire Ω par rapport au référentiel absolu.

Repère relatif : $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ d'origine A

- **Aucun mouvement relatif** : le point matériel P appartient au solide indéformable

$$\mathbf{v}_r(P) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \mathbf{a}_r(P) = \mathbf{0} \quad (12.2)$$

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_r(P) &\equiv \mathbf{AP} & \mathbf{v}_a(A) &\equiv \mathbf{V}_A & \mathbf{v}_a(P) &\equiv \mathbf{V}_P \\ \mathbf{a}_a(A) &\equiv \mathbf{A}_A & \mathbf{a}_a(P) &\equiv \mathbf{A}_P \end{aligned} \quad (12.3)$$

- **Vitesses** : deux points A et P du solide indéformable

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(A) + \underbrace{\mathbf{v}_r(P)}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.24)$$

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

$$\mathbf{r}_r(P) \equiv \mathbf{AP} \quad \mathbf{v}_a(A) \equiv \mathbf{V}_A \quad \mathbf{v}_a(P) \equiv \mathbf{V}_P \quad (12.3)$$

- **Relation entre les vitesses** : points A et P du solide indéformable

$$\mathbf{V}_P = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP} \quad (12.4)$$

- **Relation entre les vitesses** : points A et Q du solide indéformable

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{V}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AQ} \quad (12.5)$$

- **Relation entre les vitesses** : points P et Q : (12.5) - (12.4)

$$\mathbf{V}_Q - \mathbf{V}_P = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{AQ} - \mathbf{AP}) \quad (12.6)$$

- **Relation entre les vitesses** : points P et Q quelconques du solide

$$\mathbf{V}_Q = \mathbf{V}_P + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{PQ} \quad (12.7)$$

- **Accélérations** : deux points A et P du solide indéformable (10.36)

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \underbrace{\mathbf{a}_r(P)}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \right) + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \underbrace{\mathbf{v}_r(P)}_{=0} + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_r(P)$$

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

$$\mathbf{r}_r(P) \equiv \mathbf{AP} \quad \mathbf{a}_a(A) \equiv \mathbf{A}_A \quad \mathbf{a}_a(P) \equiv \mathbf{A}_P \quad (12.3)$$

- **Relation entre les accélérations** : points A et P du solide indéformable

$$\mathbf{A}_P = \mathbf{A}_A + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AP}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{AP} \quad (12.8)$$

- **Relation entre les accélérations** : points A et Q du solide indéformable

$$\mathbf{A}_Q = \mathbf{A}_A + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{AQ}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{AQ} \quad (12.9)$$

- **Relation entre les accélérations** : points P et Q : (12.9) - (12.8)

$$\mathbf{A}_Q - \mathbf{A}_P = \boldsymbol{\Omega} \times \left(\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{AQ} - \mathbf{AP}) \right) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times (\mathbf{AQ} - \mathbf{AP}) \quad (12.10)$$

- **Relation entre les accélérations** : points P et Q quelconques du solide

$$\mathbf{A}_Q = \mathbf{A}_P + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{PQ}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{PQ} \quad (12.11)$$

- **Roulement avec glissement** : (12.7)

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_C + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{CG} \quad (12.12)$$

où $\mathbf{V}_G \equiv \mathbf{V}_Q$ et $\mathbf{V}_C \equiv \mathbf{V}_P$

- 1 **Glissement sans roulement** : $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$

$$\mathbf{V}_G = \mathbf{V}_C \quad (12.13)$$

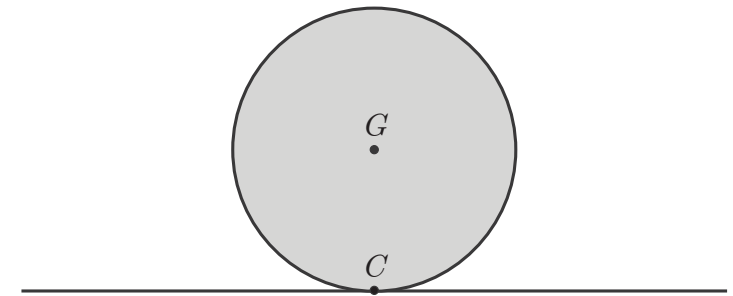
Translation du point de contact C sans rotation propre du solide autour du centre de masse G .

- 2 **Roulement sans glissement** : $\mathbf{V}_C = \mathbf{0}$

$$\mathbf{V}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{CG} \quad (12.14)$$

Rotation propre du solide autour du centre de masse G sans translation du point de contact C .

Sphère ou cylindre
plan vertical



G = centre de masse
 C = point de contact



En roulement sans glissement, le point de contact C change au cours du temps, mais à chaque instant sa vitesse par rapport au sol $\mathbf{V}_C$ est nulle.

12.2 Dynamique du solide indéformable

12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique

12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force

12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point

- **Solide indéformable** : étant donné qu'un solide indéformable est un système fermé de points matériels dont les distances relatives sont fixes, les théorèmes du centre de masse et du moment cinétique sont les mêmes que pour un système fermé de points matériels.

1 **Théorème du centre de masse** : solide indéformable

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{P}} = M \mathbf{A}_G \quad \text{car} \quad \mathbf{P} = M \mathbf{V}_G \quad \text{et} \quad M = \text{cste} \quad (12.15)$$

Mouvement de translation et de rotation du centre de masse G

2 **Théorème du moment cinétique** : solide indéformable

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O \quad (12.16)$$

Mouvement de rotation du centre de masse G autour de l'origine O et mouvement de rotation propre du solide indéformable autour d'un axe passant par le centre de masse G , évalués par rapport à l'origine O .

- **Quantité de mouvement** : solide indéformable (11.88)

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} = M \mathbf{V}_G \quad (11.87)$$

- **Moment cinétique** : évalué à l'origine fixe O (11.80)

$$\mathbf{L}_O = \sum_{\alpha} \mathbf{L}_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} \quad (11.87)$$

- **Moment cinétique** : évalué aux points O et P du solide indéformable

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_O &= \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \sum_{\alpha} (\mathbf{OP} + \mathbf{PP}_{\alpha}) \times \mathbf{p}_{\alpha} \\ &= \mathbf{OP} \times \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} + \sum_{\alpha} \mathbf{PP}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} = \mathbf{OP} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_P \end{aligned} \quad (12.17)$$

- **Théorème de transfert du moment cinétique** : entre les points O et P

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{OP} \times M \mathbf{V}_G + \mathbf{L}_P = \mathbf{R}_P \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_P \quad (12.18)$$

- **Théorème de transfert du moment cinétique** : entre les points O et P

$$L_O = OP \times M V_G + L_P = R_P \times P + L_P \quad (12.18)$$

- **Théorème de Koenig** : (12.18) point $P \equiv G$

$$L_O = OG \times M V_G + L_G = R_G \times P + L_G \quad (12.19)$$

① **Rotation du centre de masse** : $R_G \times P$ (point matériel)

② **Rotation propre** : L_G (solide indéformable)

- **Théorème de transfert du moment cinétique** : (12.18) et (12.19)

$$L_P = -OP \times M V_G + L_O = (OG - OP) \times M V_G + L_G \quad (12.20)$$

- **Théorème de transfert du moment cinétique** : entre les points P et G

$$L_P = PG \times M V_G + L_G \quad (12.21)$$

- **Théorème de transfert du moment cinétique** : entre les points C et G

$$L_C = CG \times M V_G + L_G \quad (12.22)$$

- **Forces extérieures** : solide indéformable (11.93)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = M \mathbf{A}_G \quad (11.89)$$

- **Moments de forces extérieures** : évalué à l'origine fixe O (11.81)

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} M_{O,\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \quad (11.89)$$

- **Moment de forces extérieures** : évalué aux points O et P

$$\begin{aligned} \sum M_O^{\text{ext}} &= \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} (\mathbf{OP} + \mathbf{PP}_{\alpha}) \times \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\ &= \mathbf{OP} \times \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} + \sum_{\alpha} \mathbf{PP}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \\ &= \mathbf{OP} \times M \mathbf{A}_G + \sum M_P^{\text{ext}} \end{aligned} \quad (12.23)$$

- **Théorème de transfert de moments de force** : entre les points O et P

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \mathbf{OP} \times M \mathbf{A}_G + \sum M_P^{\text{ext}} = \sum \mathbf{R}_P \times \mathbf{F}^{\text{ext}} + \sum M_P^{\text{ext}} \quad (12.24)$$

- **Théorème de transfert de moments de force** : entre les points O et P

$$\sum M_O^{\text{ext}} = OP \times M A_G + \sum M_P^{\text{ext}} = \sum R_P \times F^{\text{ext}} + \sum M_P^{\text{ext}} \quad (12.24)$$

- **Théorème de transfert de moments de force** : (12.24) point $P \equiv G$

$$\sum M_O^{\text{ext}} = OG \times M A_G + \sum M_G^{\text{ext}} = \sum R_G \times F^{\text{ext}} + \sum M_G^{\text{ext}} \quad (12.25)$$

① **Rotation du centre de masse** : $\sum R_G \times F^{\text{ext}}$ (point matériel)

② **Rotation propre** : $\sum M_G^{\text{ext}}$ (solide indéformable)

- **Théorème de transfert de moments de force** : (12.24) et (12.25)

$$\sum M_P^{\text{ext}} = -OP \times M A_G + \sum M_O^{\text{ext}} = (OG - OP) \times M A_G + \sum M_G^{\text{ext}}$$

- **Théorème de transfert de moments de force** : entre les points P et G

$$\sum M_P^{\text{ext}} = PG \times M A_G + \sum M_G^{\text{ext}} \quad (12.27)$$

- **Théorème de transfert de moments de force** : entre les points C et G

$$\sum M_C^{\text{ext}} = CG \times M A_G + \sum M_G^{\text{ext}} \quad (12.22)$$

- **Théorème de transfert du moment cinétique** : où $P = M V_G$

$$L_O = R_P \times M V_G + L_P \quad (12.18)$$

- **Dérivée temporelle du moment cinétique** : (12.18) où $M = \text{cste}$

$$\dot{L}_O = \dot{R}_P \times M V_G + R_P \times M \dot{V}_G + \dot{L}_P \quad (12.29)$$

- **Théorème du moment cinétique** : évalué à l'origine O

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O \quad (12.16)$$

- **Dérivée temporelle du moment cinétique** : (12.29) dans (12.16)

$$\sum M_O^{\text{ext}} = V_P \times M V_G + R_P \times M A_G + \dot{L}_P \quad (12.30)$$

- **Théorème de transfert de moments de force** :

$$\sum M_O^{\text{ext}} = R_P \times M A_G + \sum M_P^{\text{ext}} \quad (12.25)$$

- **Théorème du moment cinétique** : en P (12.30) et (12.25)

$$\sum M_P^{\text{ext}} = \dot{L}_P + V_P \times M V_G \quad (12.31)$$

- **Théorème du moment cinétique** : en P

$$\sum M_P^{\text{ext}} = \dot{L}_P + \mathbf{V}_P \times M \mathbf{V}_G \quad (12.31)$$

- **Théorème du moment cinétique** : (12.31) point $P \equiv G$

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (12.32)$$

- **Roulement sans glissement** : la vitesse du point de contact est nulle

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{0} \quad (12.33)$$

- **Théorème du moment cinétique** : (12.31) et (12.33) point $P \equiv C$

$$\sum M_C^{\text{ext}} = \dot{L}_C \quad (12.34)$$

12.3 Tenseur d'inertie et équations d'Euler

12.3.1 Tenseur d'inertie

12.3.2 Moments d'inertie et axes principaux d'inertie

12.3.3 Equations d'Euler

- **Quantité de mouvement** : solide indéformable

$$\mathbf{P} = M \mathbf{V}_G \quad (12.35)$$

- **Moment cinétique** : solide indéformable évalué en G

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{I}_G \boldsymbol{\Omega} \quad (12.36)$$

où $\mathbf{I}_G$ est une application linéaire appelée tenseur d'inertie représentée dans une base donnée (i.e. un repère) par une matrice 3×3 qui envoie le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ sur le vecteur moment cinétique $\mathbf{L}_G$.

- 1 **Centre de masse** : symétrie de rotation (point)

$\mathbf{P}$ est toujours colinéaire à $\mathbf{V}_G$

car la masse M est un scalaire



- 2 **Solide indéformable** : pas de symétrie de rotation

$\mathbf{L}_G$ n'est pas toujours colinéaire à $\boldsymbol{\Omega}$

car l'inertie $\mathbf{I}_G$ est une application linéaire

- **Moment cinétique** : théorème de transfert (12.19) donne (12.37)

$$\mathbf{L}_G = \mathbf{L}_O - \mathbf{R}_G \times \mathbf{P} = \sum_{\alpha} (\mathbf{O}P_{\alpha} - \mathbf{OG}) \times m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \times m_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha}$$

- **Vitesses** : points G et P_{α} du solide indéformable (12.7)

$$\mathbf{v}_{\alpha} = \mathbf{V}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha} \quad (12.38)$$

- **Moment cinétique** : évalué en G (12.38) dans (12.37)

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \times m_{\alpha} (\mathbf{V}_G + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha}) \\ &= \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \right) \times \mathbf{V}_G + \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha}) \end{aligned} \quad (12.39)$$

- **Identité cinématique** : où $\mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{GP}_{\alpha}$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{0} \quad (11.70)$$

- **Moment cinétique** : évalué en G (11.70) dans (12.39)

$$\mathbf{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{GP}_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{GP}_{\alpha}) \quad (12.40)$$

- **Moment cinétique** : évalué en G

$$\mathbf{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{G}P_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}P_{\alpha}) \quad (12.40)$$

- **Identité vectorielle** :

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c} \quad (1.44)$$

- **Identité vectorielle** : où $\mathbf{a} = \mathbf{c} = \mathbf{G}P_{\alpha}$ et $\mathbf{b} = \boldsymbol{\Omega}$

$$\mathbf{G}P_{\alpha} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{G}P_{\alpha}) = (\mathbf{G}P_{\alpha} \cdot \mathbf{G}P_{\alpha}) \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{G}P_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{G}P_{\alpha} \quad (12.41)$$

- **Moment cinétique** : évalué en G (12.41) dans (12.40)

$$\mathbf{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\mathbf{G}P_{\alpha}^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{G}P_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{G}P_{\alpha} \right) \quad (12.42)$$

- **Vitesse angulaire** : repère relatif $(\hat{\mathbf{y}}_1, \hat{\mathbf{y}}_2, \hat{\mathbf{y}}_3)$ attaché au solide

$$\boldsymbol{\Omega} = \sum_{j=1}^3 \Omega_j \hat{\mathbf{y}}_j = \sum_{j=1}^3 (\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) \hat{\mathbf{y}}_j \quad (12.43)$$

- **Moment cinétique** : évalué en G

$$\mathbf{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha}^2 \boldsymbol{\Omega} - (\mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \right) \quad (12.42)$$

- **Moment cinétique** : composante $L_{G,i} = \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{L}_G$ où $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{L}_G &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha}^2 (\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \boldsymbol{\Omega}) - (\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha}) (\mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right) \quad (12.44) \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha}^2 (\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) - (\hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha}) (\mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) \right) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) \end{aligned}$$

- **Moment cinétique** : image du vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$ par l'application linéaire tenseur d'inertie $\mathbf{l}_G$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \mathbf{L}_G &= \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} (\mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha}^2 \mathbb{1} - \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha} \otimes \mathbf{G} \mathbf{P}_{\alpha}) \hat{\mathbf{y}}_j \right) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) \\ &= \hat{\mathbf{y}}_i \cdot \sum_{j=1}^3 (\mathbf{l}_G \hat{\mathbf{y}}_j) (\boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{y}}_j) = \hat{\mathbf{y}}_i \cdot (\mathbf{l}_G \boldsymbol{\Omega}) \quad (12.45) \end{aligned}$$

- **Tenseur d'inertie** : application linéaire évaluée en G

$$I_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha}^2 \mathbb{1} - GP_{\alpha} \otimes GP_{\alpha}) \quad (12.46)$$

- ① **Application linéaire** : $GP_{\alpha}^2 \mathbb{1}$ représentée par la matrice 3×3 diagonale de composantes $\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij}$ dans la base $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$
- ② **Application linéaire** : $GP_{\alpha} \otimes GP_{\alpha}$ représentée par la matrice 3×3 symétrique de composantes $GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j}$ dans la base $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

- **Moment cinétique** : vecteur de composante $L_{G,i}$ où $i = 1, 2, 3$ dans la base $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

$$L_{G,i} = \sum_{j=1}^3 I_{G,ij} \Omega_j \quad \text{où} \quad i = 1, 2, 3 \quad (12.47)$$

- **Tenseur d'inertie** : matrice de composantes $I_{G,ij}$ où $i, j = 1, 2, 3$ dans la base $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

$$I_{G,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j} \right) \quad (12.48)$$

- **Tenseur d'inertie** : matrice de composantes $I_{G,ij}$ où $i, j = 1, 2, 3$

$$I_{G,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left(\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j} \right) \quad (12.48)$$

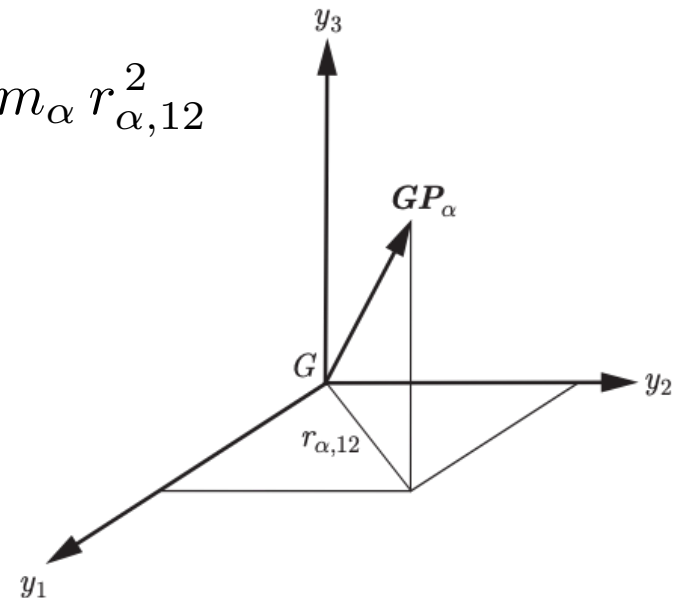
- **Tenseur d'inertie** : composantes diagonales $I_{G,ii}$ où $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad I_{G,11} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,2}^2 + GP_{\alpha,3}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,23}^2 \\ \textcircled{2} \quad I_{G,22} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,3}^2 + GP_{\alpha,1}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,31}^2 \\ \textcircled{3} \quad I_{G,33} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,1}^2 + GP_{\alpha,2}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,12}^2 \end{aligned} \quad (12.49)$$

$r_{\alpha,23}$ = distance à l'axe Gy_1

$r_{\alpha,31}$ = distance à l'axe Gy_2

$r_{\alpha,12}$ = distance à l'axe Gy_3

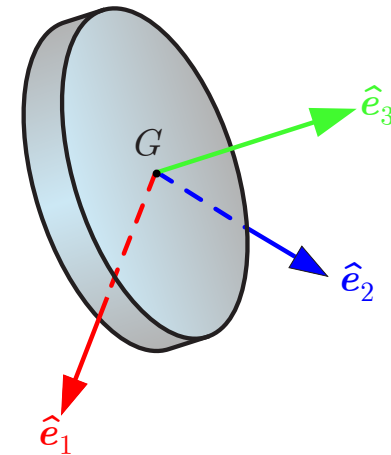


- **Tenseur d'inertie** : I_G est représenté par une matrice 3×3 symétrique à coefficients réels $I_{G,ij} = I_{G,ji}$
- **Théorème d'analyse spectrale** : il existe une base orthonormée de vecteurs propres unitaires $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ liée au solide par rapport à laquelle le tenseur d'inertie est représenté par une matrice diagonale.
- **Repère d'inertie** : repère direct $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
- **Axes principaux d'inertie** : axes Ge_1, Ge_2, Ge_3

Les axes principaux d'inertie d'un solide indéformable sont ses axes de symétrie

- **Moment cinétique** : repère d'inertie

$$\begin{pmatrix} L_{G,1} \\ L_{G,2} \\ L_{G,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.50)$$



- **Moment cinétique** : en composantes dans le repère d'inertie

$$\begin{pmatrix} L_{G,1} \\ L_{G,2} \\ L_{G,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.50)$$

- **Moment cinétique** : écriture vectorielle de (12.50)

$$\mathbf{L}_G = \sum_{i=1}^3 L_{G,i} \hat{\mathbf{e}}_i = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i \quad (12.51)$$

- **Moment cinétique** : écriture vectorielle développée

$$\mathbf{L}_G = I_{G,1} \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (12.52)$$

- **Moments d'inertie** : du solide par rapport à une rotation autour des axes principaux d'inertie Ge_1 , Ge_2 et Ge_3

$$I_{G,1} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,1}^2 \quad I_{G,2} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,2}^2 \quad I_{G,3} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,3}^2 \quad (12.53)$$

où $r_{\alpha,i}$ = distance du point matériel P_{α} à l'axe Ge_i où $i = 1, 2, 3$.

- **Moments d'inertie : solides réguliers**

- ① **Ellipsoïde** : pas d'axe de symétrie

$$I_{G_1} \neq I_{G_2} \neq I_{G_3} \neq I_{G_1}$$

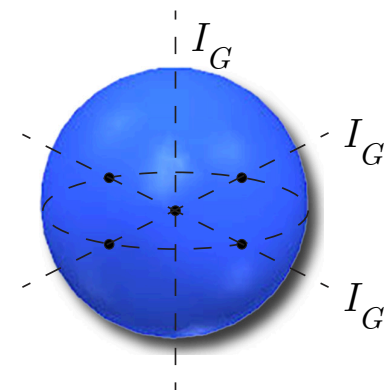
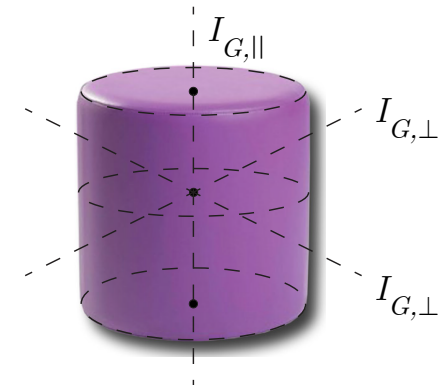
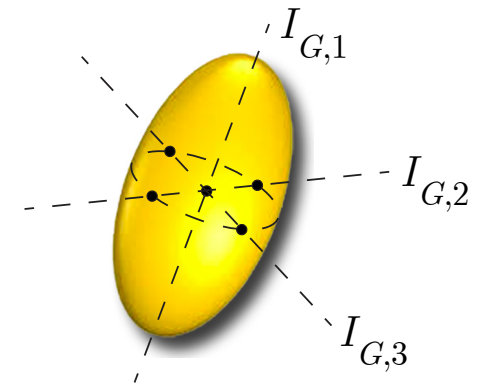
- ② **Cylindre** : un axe de symétrie

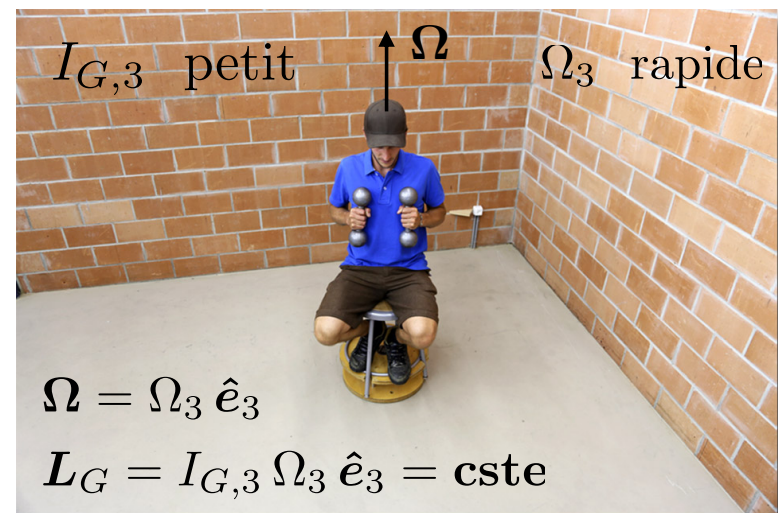
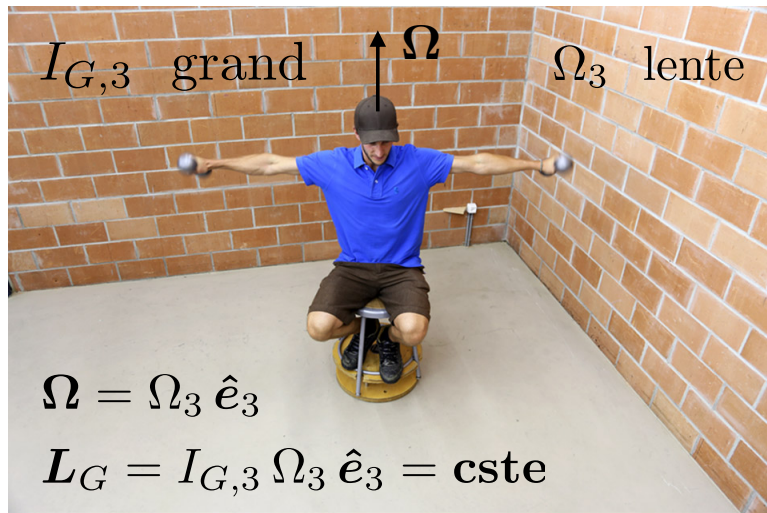
$$I_{G_2} = I_{G_3} \equiv I_{G_{\perp}}$$

$$I_{G_1} \equiv I_{G_{\parallel}} \neq I_{G_{\perp}}$$

- ③ **Sphère** : infinité d'axes de symétrie

$$I_{G_1} = I_{G_2} = I_{G_3} \equiv I_G$$





- La somme des moments de forces du poids P et de la réaction normale N évalués en G est nulle. Ainsi, le moment cinétique est conservé,

$$\sum M_G^{\text{ext}} = 0 \quad \text{ainsi} \quad L_G = I_{G,3} \Omega_3 \hat{e}_3 = \text{cste}$$

- En ramenant les haltères vers le corps, le moment d'inertie $I_{G,3}$ diminue, ce qui augmente la vitesse angulaire Ω_3 afin de garder le moment cinétique L_G constant.
- En éloignant les haltères du corps, le moment d'inertie $I_{G,3}$ augmente, ce qui diminue la vitesse angulaire Ω_3 afin de garder le moment cinétique L_G constant.

- **Formules de Poisson** : vecteurs unitaires du repère d'inertie

$$\dot{\hat{e}}_i = \boldsymbol{\Omega} \times \hat{e}_i \quad \forall \quad i = 1, 2, 3 \quad (12.54)$$

- **Moment cinétique** :

$$\mathbf{L}_G = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{e}_i \quad (12.51)$$

- **Solide indéformable** : moments d'inertie constants

$$\dot{I}_{G,i} = 0 \quad \forall \quad i = 1, 2, 3 \quad (12.55)$$

- **Dérivée temporelle du moment cinétique** : (12.51), (12.54) et (12.55)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_G &= \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \dot{\hat{e}}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \left(\sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{e}_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_G \end{aligned} \quad (12.56)$$

❶ **Cas particulier :** si $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0$

$$\dot{\mathbf{L}}_G = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_G \quad (12.57)$$

Précession du moment cinétique $\mathbf{L}_G$ autour de l'axe de rotation défini par le vecteur vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}$.

❷ **Cas général :**

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{L}}_G &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \dot{\Omega}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \dot{\Omega}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{L}_G \\ &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \dot{\Omega}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \dot{\Omega}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &\quad \underbrace{(\Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3)}_{=\boldsymbol{\Omega}} \times \underbrace{(I_{G,1} \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3)}_{=\mathbf{L}_G} \\ &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \dot{\Omega}_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \dot{\Omega}_3 \hat{\mathbf{e}}_3 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &\quad + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_2 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (12.58)$$

• **Somme des moments de forces extérieures :** évalué en G

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \sum M_{G,1}^{\text{ext}} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sum M_{G,2}^{\text{ext}} \hat{\mathbf{e}}_2 + \sum M_{G,3}^{\text{ext}} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (12.59)$$

- **Théorème du moment cinétique :**

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (12.32)$$

- **Equations d'Euler :** (12.58) et (12.59) dans (12.32)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \text{selon } \hat{e}_1 : \quad \sum M_{G,1}^{\text{ext}} &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2 \\ \textcircled{2} \quad \text{selon } \hat{e}_2 : \quad \sum M_{G,2}^{\text{ext}} &= I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \\ \textcircled{3} \quad \text{selon } \hat{e}_3 : \quad \sum M_{G,3}^{\text{ext}} &= I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1 \end{aligned} \quad (12.60)$$

- **Théorème du centre de masse :**

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = M \dot{V}_G \quad (12.15)$$

- **Equations du mouvement :**

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad \text{selon } \hat{e}_1 : \quad \sum F_1^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,1} \\ \textcircled{2} \quad \text{selon } \hat{e}_2 : \quad \sum F_2^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,2} \\ \textcircled{3} \quad \text{selon } \hat{e}_3 : \quad \sum F_3^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,3} \end{aligned} \quad (12.61)$$